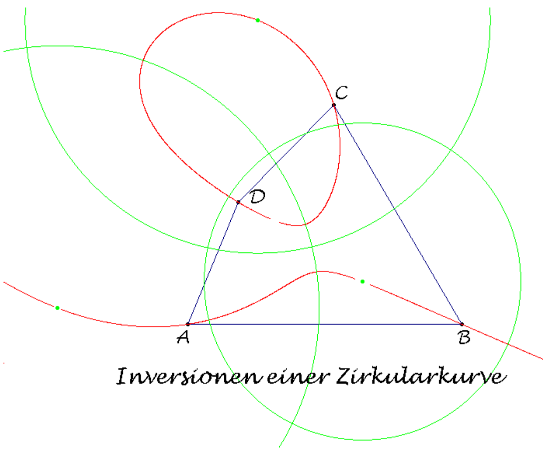
Inversionen einer Zirkularkurve

Eckart Schmidt

Zu der Zirkularkurve eines Vierecks werden Inversionen aufgezeigt, die die Zirkularkurve auf sich abbilden und dem Viereck ein Inversionsviereck zuordnen, das mit einer Punktrechnung auf der Zirkularkurve untersucht wird und abschließend in seinem elementargeometrischen Bezug zum Ausgangsviereck dargestellt wird.



Die Zirkularkurve von vier Punkten

Ausgehend von einem Bezugsdreieck *ABC* ist eine Zirkularkurve eine Kurve dritter Ordnung („circular isocubic" [1]), die isogonal invariant ist und einen Fernpunkt als Pivotpunkt hat, d.h. die Verbindungsgeraden isogonaler Kurvenpunkte sind parallel. Gibt man dem Fernpunkt die baryzentrischen Koordinaten

$$(\alpha:\beta:\gamma) \quad \text{mit} \quad \alpha+\beta+\gamma=0,$$

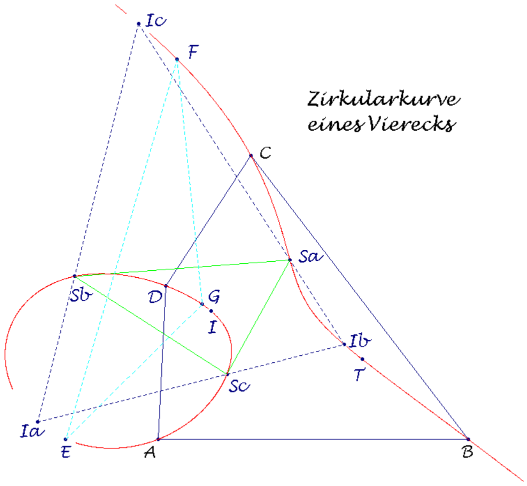
so lautet die Gleichung der Zirkularkurve

$$a^2(\gamma y-\beta z)yz+b^2(\alpha z-\gamma x)zx+c^2(\beta x-\alpha y)xy=0 \ .$$

Vier Punkten *A, B, C, D* lässt sich dann folgendermaßen eine Zirkularkurve zuordnen: Das Bezugsdreieck (Seitenlängen *a, b, c*) sei das Steiner-Dreieck $S_aS_bS_c$ der vier Punkte, d.h. das Dreieck der Steiner-Punkte der vollständigen Vierseite zu den Vierecken *ABDC, ABCD, ADBC*. Dabei ist der Steiner- oder auch Miquel-Punkt der gemeinsame Punkt der Umkreise der Teildreiseite eines Vierseits. Gibt man dem vierten Punkt etwa die baryzentrischen Koordinaten $D(u:v:w)$, so liefert die Verbindungsgerade mit seinem isogonalen Bild $D^*(a^2vw:b^2wu:c^2uv)$ den Fernpunkt

$$(a^2vw(v+w)-b^2u^2w-c^2u^2v:-a^2v^2w+b^2wu(w+u)-c^2v^2u$$
$$:-a^2w^2v-b^2w^2u+c^2uv(u+v))\ .$$

Mit diesem Fernpunkt erhält man dann zum Steiner-Dreieck die Zirkularkurve der vier Punkte. Sie enthält nicht nur die vier Punkte *A, B, C, D* und die drei Steiner-Punkte S_a, S_b, S_c , sondern auch die Diagonalenschnitte *E, F, G* sowie die Inkreismitte *I* und die Ankreismitten I_a, I_b, I_c des Steiner-Dreiecks als Fixpunkte der isogonalen Konjugation. Unter weiteren Punkten der Zikularkurve sei der Tangentialpunkt *T* der vier Punkte angesprochen, in dem sich ihre Tangenten wieder auf der Zirkularkurve schneiden. Kurvenpunkte mit gleichem Tangentialpunkt seien als korrespondierend angesprochen. Vier korrespondierende Kurvenpunkte haben immer das gleiche Steiner-Dreieck.



Inversionen der Zirkularkurve

Die Inversionen der Zirkularkurve orientieren sich am Steiner-Dreieck $S_aS_bS_c$ als Bezugsdreieck und dem spitzwinkligen Dreieck $I_aI_bI_c$ seiner Ankreismitten. Zu diesen Ankreismitten lassen sich jetzt Inversionen mit folgenden Zuordnungen aufzeigen:

ι_a : Inversionskreis um $I_a(-a:b:c)$ mit Radius $\sqrt{\dfrac{2abc}{-a+b+c}}$:

$$S_a \leftrightarrow I,\quad S_b \leftrightarrow I_c,\quad S_c \leftrightarrow I_b\ ;$$

ι_b : Inversionskreis um $I_b(a:-b:c)$ mit Radius $\sqrt{\dfrac{2abc}{a-b+c}}$:

$$S_a \leftrightarrow I_c,\quad S_b \leftrightarrow I,\quad S_c \leftrightarrow I_a\ ;$$

ι_c : Inversionskreis um $I_c(a:b:-c)$ mit Radius $\sqrt{\dfrac{2abc}{a+b-c}}$:

$$S_a \leftrightarrow I_b,\quad S_b \leftrightarrow I_a,\quad S_c \leftrightarrow I\ .$$

Spiegelt man die Ankreismitten an der Inkreismitte, so lässt sich eine weitere Inversion angeben, die diese gespiegelten Punkte in die Steiner-Punkte überführt:

Inversionskreis um $I(a:b:c)$ mit Radius $\sqrt{\dfrac{2abc}{a+b+c}}$:

$$S_a \;\leftrightarrow\; I_a', \quad S_b \;\leftrightarrow\; I_b', \quad S_c \;\leftrightarrow\; I_c' \; .$$

Die ersten drei Inversionen bilden die Zirkularkurve auf sich ab, z.B. nach der Zuordnungsvorschrift

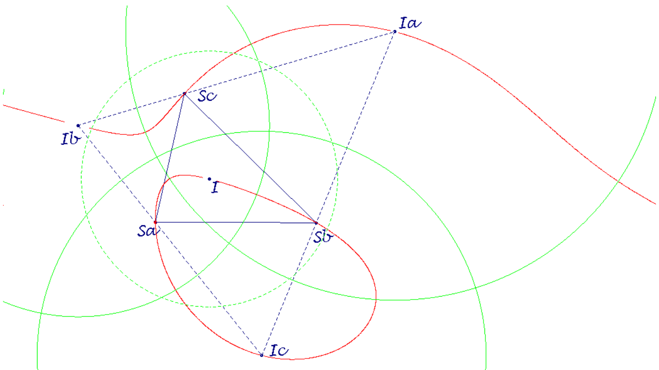
$\iota_a: \quad (x:y:z) \leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&(a(bcx^2+cay^2+abz^2+(a+b+c)(cxy+bzx+ayz)\\ &:b(bcx^2+cay^2-abz^2-(a+b-c)(-cxy+bzx+ayz)\\ &:c(bcx^2-cay^2+abz^2-(a-b+c)(cxy-bzx+ayz)) \; .\end{aligned}$$

Schließt man im vierten Fall die Spiegelung an der Inkreismitte des Steiner-Dreiecks mit ein, so erhält man eine − hier als Quasi-Inversion angesprochene – Abbildung $\iota = \iota_a \iota_b \iota_c$, die die Zirkularkurve ebenfalls auf sich abbildet:

$\iota: \quad (x:y:z) \leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&(a(-bcx^2+cay^2+abz^2-(-a+b+c)(cxy+bzx-ayz)\\ &:b(bcx^2-cay^2+abz^2-(a-b+c)(cxy-bzx+ayz)\\ &:c(bcx^2+cay^2-abz^2-(a+b-c)(-cxy+bzx+ayz)) \; .\end{aligned}$$



Inversionen einer Zirkularkurve

Das kommutative Hintereinanderausführen dieser vier Abbildungen führt zu weiteren Quasi-Inversionen der Zirkularkurve, bestehend aus Inversionen mit Zentrum in einer Ecke des Steiner-Dreiecks und einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch diese Ecke.

	ι	ι_a	ι_b	ι_c
ι	id	σ_a	σ_b	σ_c
ι_a	σ_a	id	σ_c	σ_b
ι_b	σ_b	σ_c	id	σ_a
ι_c	σ_c	σ_b	σ_a	id

Beispiel: $\sigma_a = \iota_b \iota_c = \iota_c \iota_b = \iota \iota_a = \iota_a \iota$,

Inversionskreis um S_a mit Radius $\sqrt{bc}$,

$$I \;\leftrightarrow\; I_a, \quad S_b \;\leftrightarrow\; S_c, \quad I_b \;\leftrightarrow\; I_c \; ,$$

$\sigma_a: \quad (x:y:z) \leftrightarrow$

$$(a^2yz+b^2zx+c^2xy : -b^2z(x+y+z) : -c^2y(x+y+z) \; .$$

Diese Quasi-Inversionen bilden einen Kurvenpunkt $D(u:v:w)$ auf seine korrespondierenden Punkte ab wie aus dem nächsten Abschnitt deutlich wird.

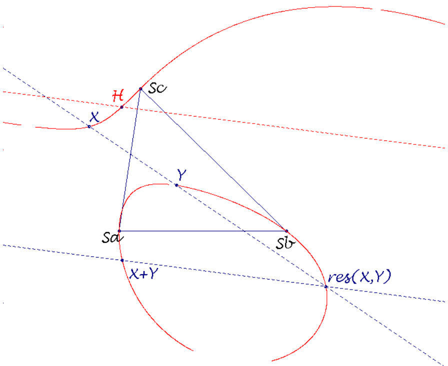
Punktrechnung auf der Zirkularkurve

Beschränkt man sich auf die Punkte einer Zirkularkurve, so reduzieren sich die Inversionen ι_a, ι_b, ι_c und auch die Quasi-Inversion ι auf die Kollinearität von Punkt und Bildpunkt mit dem Inversionszentrum auf der Zirkularkurve. Der dritte Schnitt der Geraden durch Inversionszentrum und Kurvenpunkt liefert den Bildpunkt, das sogenannte Residuum der beiden Punkte. Dieses Residuum kann zu einer Verknüpfung von Kurvenpunkten herangezogen werden ([2], [3]).
Ist die Zirkularkurve durch ein Bezugsdreieck $S_aS_bS_c$, die zugehörige Isogonalität * und einen Fernpunkt festgelegt, so sei die additiv geschriebene Verknüpfung wie folgt definiert:

(1) $X+Y =_{def} res(X,Y)^* \quad \Leftrightarrow \quad res(X,Y) = (X+Y)^*$.

Diese kommutative Verknüpfung besitzt Gruppeneigenschaften. Der definierende Fernpunkt sei hier als isogonales Bild des sogenannten Hauptpunktes H dargestellt, dem vierten Schnitt des Umkreises des Bezugsdreiecks mit der Zirkularkurve. Der Fernpunkt H^* ist dann neutrales Element O der Verknüpfung. Das additiv Inverse eines Punktes ist somit

(2) $\qquad -X = res(X,H)$.



Punktrechnung auf der Zirkularkurve

Als „Handwerkszeug“ seien einige Übersetzungen geometrischer Eigenschaften in additive Aussagen dieser Punktrechnung angegeben, eine Begründung findet sich in [2]:

(3) $\quad X,Y,Z \quad kollinear \quad \Leftrightarrow \quad X+Y+Z=H$,

(4) $\quad X,X^* \quad isogonal\ konjugiert \quad \Leftrightarrow \quad X+X^*=H$,

(5) $\quad T_X \quad Tangentialpunkt\ von\ X \quad \Leftrightarrow \quad T_X = H-2X$,

(6) $X,Y\ korrespondierend \quad \Leftrightarrow \quad T_X = T_Y \quad \Leftrightarrow \quad 2X=2Y$,

(7) $P,Q,R,S \quad konzyklisch \quad \Leftrightarrow \quad P+Q+R+S=H$.

Gewöhnungsbedürftig ist der Umgang mit korrespondierenden Punkten, d.h. Punkten mit gleichem Tangentialpunkt. Aus der Gleichung $2X=2Y$ kann nur auf die Korrespondenz, nicht aber auf die Gleichheit geschlossen werden. Weiterhin gilt

$X-Y=Y-X$ und die alternierende Summe von drei korrespondierenden Punkten ergibt den vierten. So bilden die Inkreismitte und die Ankreismitten des Bezugsdreiecks ein korrespondierendes Quadrupel, denn als Fixpunkte der Isogonalität gilt für sie

$$2I=2I_a=2I_b=2I_c=H\ ;$$

Tangentialpunkt ist der Fernpunkt. Für die Ecken des Bezugsdreiecks erhält man z.B.

$$S_a=res(I,I_a)=(I+I_a)^*=H-I-I_a=I^*-I_a=I-I_a\ ,$$

$$\text{entsprechend } S_b=I-I_b,\quad S_c=I-I_c$$

$$\text{mit } 2S_a=2S_b=2S_c=O=H^*\ .$$

Die Ecken des Bezugsdreiecks korrespondieren also, vierter korrespondierender Punkt ist der Fernpunkt der Zirkularkurve; Tangentialpunkt ist der Hauptpunkt *H*.
Für die Inversionen und Quasi-Inversionen ergeben sich jetzt folgende einfache Zuordnungen auf der Zirkularkurve:

$$\iota_a:X\to I_a-X,\ \iota_b:X\to I_b-X,\ \iota_c:X\to I_c-X,\ \iota:X\to I-X,$$

$$\sigma_a:X\to I-I_a+X,\ \sigma_b:X\to I-I_b+X,\ \sigma_c:X\to I-I_c+X\ .$$

Wie man unmittelbar nachrechnet, bilden $\sigma_a,\sigma_b,\sigma_c$ einen Punkt *D* auf seine korrespondierenden Punkte ab mit dem gemeinsamen Tangentialpunkt $H-2D$.

Das Inversionsviereck

Zu vier Punkten *A, B, C, D* wird jetzt im obigen Sinne die Zirkularkurve betrachtet, festgelegt durch das Steiner-Dreieck $S_aS_bS_c$, die zugehörige Isogonalität und den Fernpunkt z.B. von der Verbindungsgeraden DD^*. Da die vier Punkte mit ihrem Tangentialpunkt auf der Zirkularkurve liegen, bilden sie ein korrespondierendes Quadrupel und lassen sich aus dem Punkt *D* durch $\sigma_a,\sigma_b,\sigma_c$ gewinnen:

$$A=I-I_a+D,\quad B=I-I_b+D,\quad C=I-I_c+D\ .$$

Es stellt sich die Frage, wie die obigen Inversionen und Quasi-Inversionen die Punkte *A, B, C, D* abbilden. Dies lässt sich jetzt elementar nachrechnen. Die Quasi-Inversion ι liefert vier neue Punkte:

$$A\ \rightarrow\ A'=I_a-D,\quad B\ \rightarrow\ B'=I_b-D,$$

$$C\ \rightarrow\ C'=I_c-D,\quad D\ \rightarrow\ D'=I-D.$$

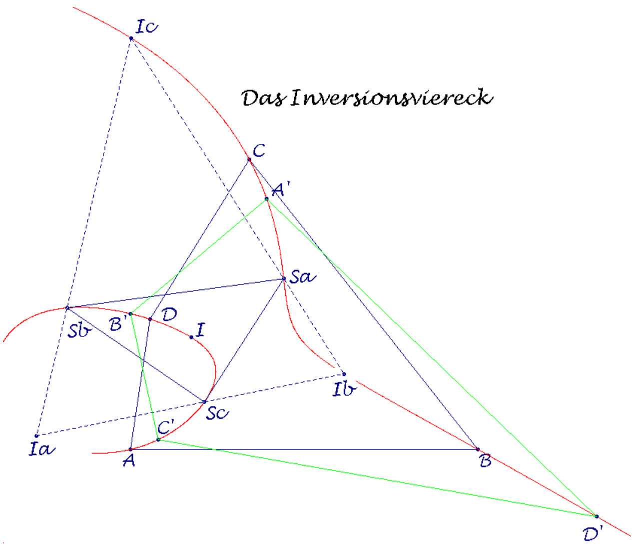
Damit ergeben sich folgende Zuordnungen:

	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
ι	A'	B'	C'	D'	A	B	C	D
ι_a	D'	C'	B'	A'	D	C	B	A
ι_b	C'	D'	A'	B'	C	D	A	B
ι_c	B'	A'	D'	C'	B	A	D	C
σ_a	D	C	B	A	D'	C'	B'	A'
σ_b	C	D	A	B	C'	D'	A'	B'
σ_c	B	A	D	C	B'	A'	D'	C'

Für die Quasi-Inversionen $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ gilt:

σ_a vertauscht *D*, *A* sowie *B*, *C* als auch *D´*, *A´* sowie *B´*, *C´*,
σ_b vertauscht *D*, *B* sowie *A*, *C* als auch *D´*, *B´* sowie *A´*, *C´*,
σ_c vertauscht *D*, *C* sowie *A*, *B* als auch *D´*, *C´* sowie *A´*, *B´*.

Die vier Punkte *A´, B´, C´, D´* bilden ein korrespondierendes Quadrupel mit dem Tangentialpunkt *2D*, d.h. dem isogonalen Bild des Tangentialpunkts von *A, B, C, D*. Beide Quadrupel liegen vierfach perspektiv auf der Zirkularkurve. Das Viereck *A´B´C´D´* sei als Inversionsviereck des Vierecks *ABCD* angesprochen;



Geometrie des Inversionsvierecks

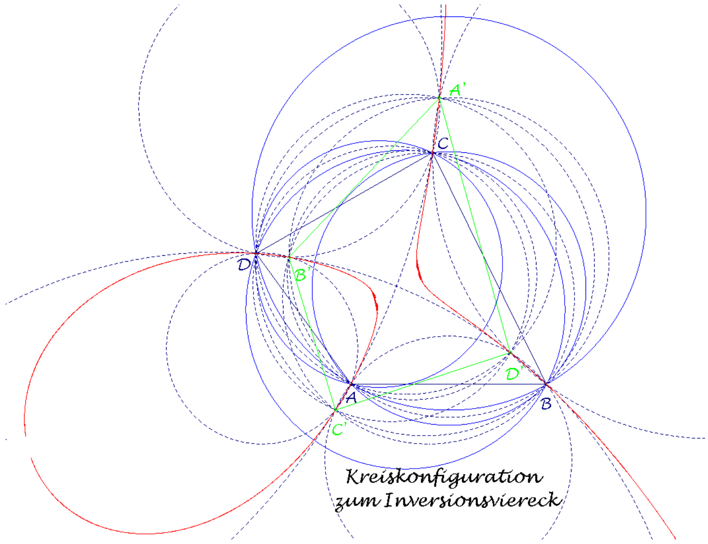
Abschließend soll dem Inversionsviereck − unabhängig von den Inversionen der Zirkularkurve − eine weitere Interpretation gegeben werden. Dazu werden die Umkreise der Teildreiecke des Vierecks *ABCD* betrachtet. Diese werden durch die Quasi-Inversionen $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ wie folgt aufeinander abgebildet:

	k_{ABC}	k_{BCD}	k_{CDA}	k_{DAB}
σ_a	k_{BCD}	k_{ABC}	k_{DAB}	k_{CDA}
σ_b	k_{CDA}	k_{DAB}	k_{ABC}	k_{BCD}
σ_c	k_{DAB}	k_{CDA}	k_{BCD}	k_{ABC}

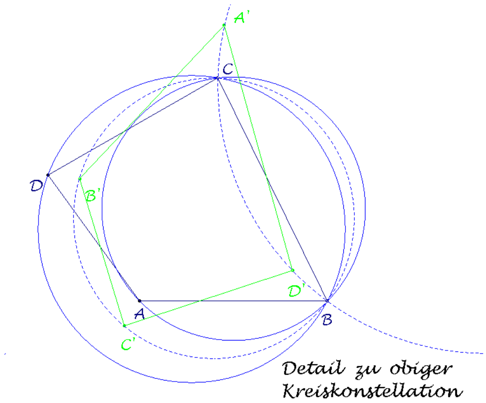
Weiterhin lassen sich 12 konzyklische Punkte-Quadrupel (Summe *H*) nachweisen:

D,A,D´,A´ ; D,A,B´,C´ ; B,C,B´,C´ ; B,C,D´,A´ ;
D,B,D´,B´ ; D,B,A´,C´ ; A,C,A´,C´ ; A,C,D´,B´ ;
D,C,D´,C´ ; D,C,A´,B´ ; A,B,A´,B´ ; A,B,D´,C´ .

Von den zugehörigen 12 Kreisen schneiden sich jeweils 6 in den Ecken des Inversionsvierecks. Dabei erweisen sich die Kreise zur ersten Zeile als Fixkreise der Quasi-Inversion σ_a, entsprechend sind die Kreise zur zweiten bzw. dritten Zeile Fixkreise von σ_b bzw. σ_c.



Diesen Fixkreisen kann folgende Deutung gegeben werden: Z.B. werden die Umkreise k_{ABC} und k_{BCD} der Teildreiecke *ABC* und *BCD* durch die Quasi-Inversion σ_a vertauscht. Diese beiden Kreise haben die Schnitte *B* und *C*; damit ergeben sich zwei Inversionskreise, so dass die beiden Kreise durch Spiegelung an diesen Inversionskreisen aufeinander abgebildet werden. Diese Inversionskreise sind dann die Fixkreise von σ_a durch die Punkte *B* und *C*.



Eine Übersicht über die Inversionskreise der Umkreise der Teildreiecke eines Vierecks *ABCD* erhält man auch durch Spiegelung an einem Kreis z.B. um den Punkt *D* [4]. Die Umkreise der Teildreiecke *BCD, CDA, DAB* werden zu Seitengeraden eines Dreiecks. Die zugehörigen Inversionskreise sind die inneren und äußeren Winkelhalbierenden dieses Dreiecks. Die Rückspiegelung der Inkreismitte und der Ankreismitten dieses Dreiecks ergibt die Ecken des Inversionsvierecks.

Zusammengefasst: Betrachtet man zu einem Viereck *ABCD* die Umkreise der vier Teildreiecke, so haben die Umkreise paarweise zwei Inversionskreise. Diese 12 Inversionskreise ergeben vier neue 6fach-Schnittpunkte, die ein

Inversionsviereck bilden. Beide Vierecke sind korrespondierende Quadrupel der gleichen Zirkularkurve und werden durch die Inversionen dieser Zirkularkurve aufeinander abgebildet.

Literatur

[1] J.-P. Ehrmann and B. Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. – http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/...

[2] F. Lang: Geometry and Group Structures of some Cubics. – Forum Geometricorum, Volume 2 (2002) 135-146.

[3] E. Schmidt: Geometrie auf der Zirkularkurve. – http://eckartschmidt.de

[4] R. A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. – Dover Publications, Mineola, New York, 2007, S. 98.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf

http://eckartschmidt.de

eckart_schmidt@t-online.de